

Zdravstvena fizika: Zmanjševanje variance pri MC transportu

April 23, 2018

1 Zmanjševanje variance

Varianca toka, določenega iz kombinacij zgodovin naključno generiranih delcev bo odvisna od njihovega števila. Obliko porazdelitve izbranega parametra (doze, itd.) po N zgodovinah lahko približno opišemo s konvolucijo N porazdelitev, zato bo varianca σ_N^2 ocenjenega povprečja po N generiranih delcih približno:

$$\sigma_N^2 = \frac{\sigma_1^2}{N},$$

kjer je σ_1 varianca po eni sami zgodovini, ki je neodvisna od števila generiranih delcev.

V večini primerov bomo tako napako simulacije zmanjševali z večanjem števila generiranih delcev. Ker vsaka zgodovina zahteva določeno procesorsko moč, bo povezava med varianco in časom simulacije (t) podobna kot zgoraj:

$$\sigma_t^2 = \frac{\sigma_0^2}{t}$$

kjer smo s σ_0 označili prispevek, neodvisen od časa. Uspešnost simulacije ocenimo z oceno odlike (ang. figure of merit, FOM):

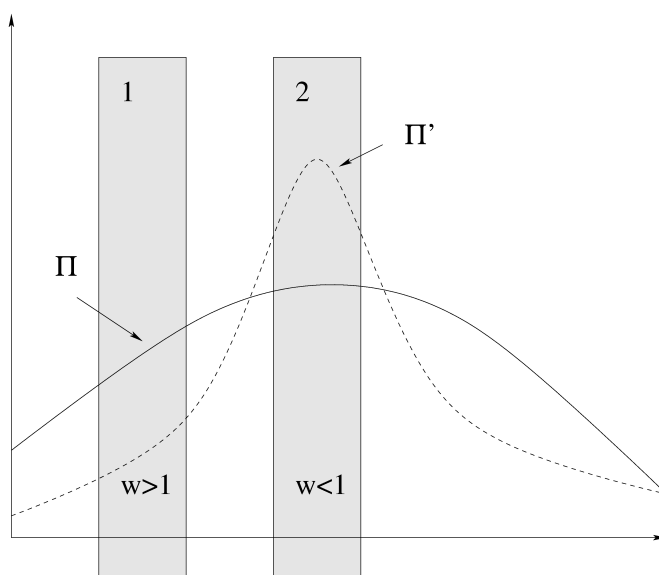
$$\text{FOM} = \frac{1}{\sigma_t^2 t}$$

FOM bo za boljše strategije naraščala.

Kaj pa so boljše strategije? Dostikrat se izkaže, da je za ovrednotenje izbrane količine kritičnih nekaj dogodkov s posebnimi lastnostmi. Primeri so študij interakcij globoko v snovi, kjer prispeva le tisti (majhen) delež dogodkov, ki prodre do te globine, študij redkih pojavov, študij detektorjev,

ki zavzemajo le majhen del celotnega faznega prostora simulacije in podobno. Takrat radi "goljufamo" in simuliramo predvsem tiste dogodke, ki so za nas zanimivi.

Formalno opišemo postopek tako, da namesto **prave porazdelitve** $\pi(x)$ generiramo dogodke in interakcije po **prilagojeni porazdelitvi** $\pi'(x)$, kjer si lahko z x predstavljamo nabor faznih spremenljivk dogodka (smer, energija, ipd.) Ker simuliramo po $\pi'(x)$ bomo del dogodkov simulirali večkrat, kot je prav in kar naroča $\pi(x)$, kot je to v regiji 2 na sliki, del dogodkov pa manjkrat kot bi jih morali, kot v regiji 1. Če smo izbrali $\pi'(x)$ prav, bo zanimivih dogodkov več, nezanimivih pa manj.



Da popravimo s tem nastalo napako, uvedemo koncept **uteži**. Poleg ostalih fizikalnih parametrov dobi vsak generiran delec nov parameter, utež. Utež meri njegovo statistično pomembnost glede na fizikalno porazdelitev. Za zgornji scenarij bomo utež kot funkcijo parametrov x uvedli kot razmerje:

$$w = \frac{\pi(x)}{\pi'(x)}$$

V območju 1 je $\pi' < \pi$, zato bo utež večja od 1. To generiramo manj delcev kot bi jih morali, zato jih utežimo močnejše. Nasprotno v območju 2 generiramo več delcev kot bi jih smeli, kar odraža utež, manjša od 1.

2 Fizikalni mehanizmi zmanjševanja variance

Mehanizme zmanjševanja variance glede na motivacijo delimo na fizikalne in matematične. Fizikalni mehanizmi so tisti, s katerimi izbiramo tiste kritične dogodke, ki bodo manjšali negotovost simulacije. Mednje štejemo:

- **Omejevanje faznega prostora.** Ko detektor zaseda le del možnih smeri izvornih delcev, generiramo delce le v smeri detektorja in jim pripišemo utež glede na delež faznega prostora, ki ga pokrijejo. Dostikrat to storimo izven simulacije, še posebej v najpreprostejšem primeru, ko generiramo le delce enakomerno v izseku prostorskega kota, druge pa ne, in je izvor izotropen, saj je utež vseh delcev enaka.
- **Siljenje interakcij.** Namesto upoštevanja fotoefekta in Comptonskega sipanja vedno naredimo slednjega na izbranem večkratniku prostih poti n_r . Pri tem zanemarjanje prvega nadomestimo z manjšanjem uteži:

$$w' = \frac{w}{1 - \exp(-\mu_{\text{FE}} d)}$$

kjer je d izbrani korak, navadno enak n_r/μ_C . Ko utež pade pod izbrano mejo, delce pogosto redčimo z rusko ruleto (glej spodaj).

- **Uteževanje po regijah.** Prostorninam pripišemo različno pomembnost. V pomembnejših regijah število delcev večamo z deljenjem (glej spodaj), a jim manjšamo utež, v manj pomembnih regijah pa redčimo število delcev z rusko ruleto, a večamo njihove uteži.

3 Matematični mehanizmi zmanjševanja variance

Matematični mehanizmi so tisti, s katerimi izvajamo principe zmanjševanja variance. Motivacijo podajajo fizikalni mehanizmi, tu gre le za načine. Tu si bomo ogledali dva najpomembnejša:

- **Deljenje delcev (ang. Splitting).** Pri deljenju delcev en delec pomnožimo N_0 -krat (kjer je N_0 lahko realno število). To pomeni da dobimo $N=N_0$ delcev z identičnimi parametri (energijo, smerjo, lego). Vsakemu pripišemo utež enako:

$$w' = \frac{w}{N},$$

kjer je w utež vhodnega delca. S to utežjo potem pomnožimo fizikalne vplive (npr. odloženo energijo). Če je N_0 zvezen, lahko generiramo število delcev N po Poissonovi porazdelitvi z $\mu=N_0$, za utež vzamemo dejansko število N generiranih delcev. Delce nato sledimo naprej neodvisno.

- **Ruska ruleta.** Nasprotni mehanizem je ruska ruleta. Tu zmanjšamo število delcev na $p = 1/N$. Izžrebmo ξ ; če je manjši od p delec obdržimo in mu povečamo utež na:

$$w' = \frac{w}{p}$$

sicer s sledenjem temu delcu končamo.